

Corso Zero Matematica CdL Scienze Biologiche

Sistemi di Equi e disequazioni

Risolvere un sistema di due o più disequazioni (equazioni) significa trovare l'insieme delle soluzioni di ciascuna disequazione, e mettere a intersezione tali insiemi.

Esempio

$$\begin{cases} \textcircled{1} & x(x-4) < 12 \\ \textcircled{2} & x(2x-1)+3 > 4x \\ \textcircled{3} & x^2+x > -1 \end{cases}$$

Risolviamo

$$x^2 - 4x - 12 < 0$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 16 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 4^2 + 4 \cdot 4 \cdot 3 = 4^2 + 4^2 \cdot 3 \\ &= 4^2(1+3) = 4^2 \cdot 4 \\ &= 4^2 \cdot 2^2 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{4 - 8}{2}, \quad x_2 = \frac{4 + 8}{2}$$

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 6$$

Sol $\textcircled{1}$

$$A_1 =]-2, 6[$$

Risolviamo $\textcircled{2}$

$$x(2x-1)+3 > 4x$$

$$2x^2 - x + 3 - 4x > 0$$

$$2x^2 - 5x + 3 > 0$$

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$$

$$x_1 = \frac{5-1}{4}, \quad x_2 = \frac{5+1}{4}$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{3}{2}$$

Sol ② $A_2 =]-\infty, 1[\cup]\frac{3}{2}, +\infty[$

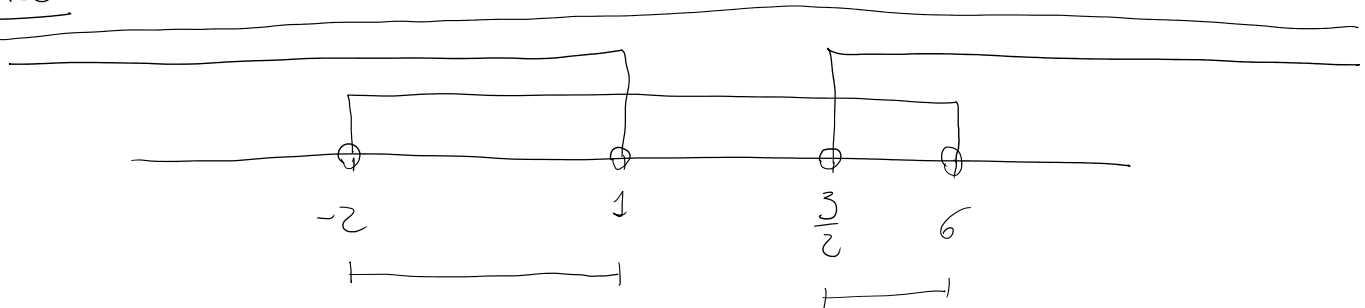
Risolvo ③ $x^2 + x > -1$

$$x^2 + x + 1 > 0$$

$$\Delta = 1 - 4 < 0$$

Sol ③ $A_3 = \mathbb{R}$

Grafico



Sol sistema $A_1 \cap A_2 \cap A_3 =]-2, 1[\cup]\frac{3}{2}, 6[$

Esercizio

$$\begin{cases} ① & 2x^2 - 5x - 3 < 0 \\ ② & x^2 \geq x \end{cases}$$

Risolvo ① $2x^2 - 5x - 3 < 0$

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 + 24 = 49 = 7^2$$

$$x_1 = \frac{5-7}{4}$$

$$x_2 = \frac{5+7}{4}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = 3$$

Sol ①

$$A_1 =]-\frac{1}{2}, 3[$$

Risolvo ②

$$x^2 \geq x$$

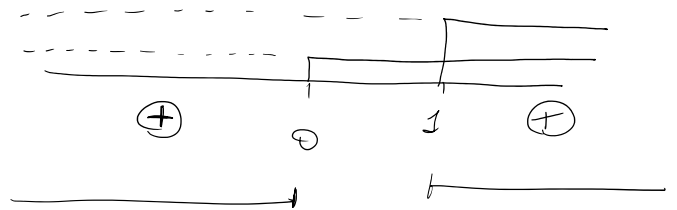
$$x^2 - x \geq 0$$

$$x(x-1) \geq 0$$

studio dei segni

Segno $x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

Segno $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

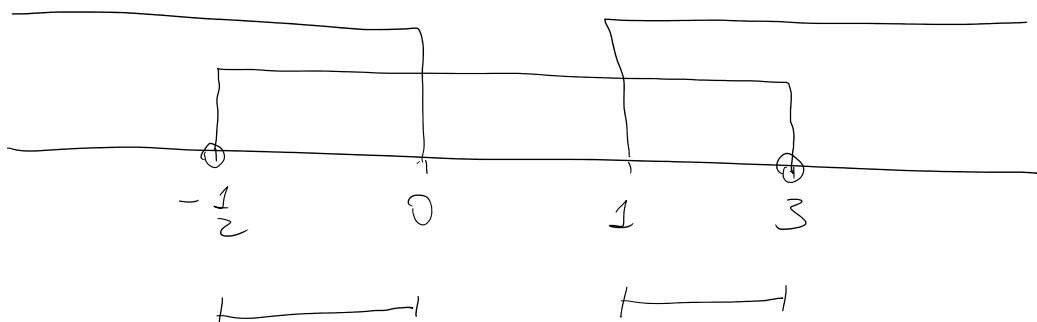


Sol ②

$$A_2 =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$$

Sol. sistema $A_1 \cap A_2 = ?$

Grafico



Concluso. Sol sistema $]-\frac{1}{2}, 1[$

Concluso Sol sistema $]-\frac{1}{2}, 0] \cup [1, 3[$

Valore Assoluto

Sia $a \in \mathbb{R}$, si definisce il valore assoluto di a come

$$|a| := \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Proprietà (valore Assoluto)

- 1) $|a| \geq 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- 2) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
- 3) $|a| = |-a|$
- 4) $|a+b| \leq |a| + |b|$ (disuguaglianza triangolare)
- 5) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- 6) $\frac{|a|}{|b|} = \left| \frac{a}{b} \right|$

Esempio a) $|2+3| = |2| + |3| \quad (= 5)$

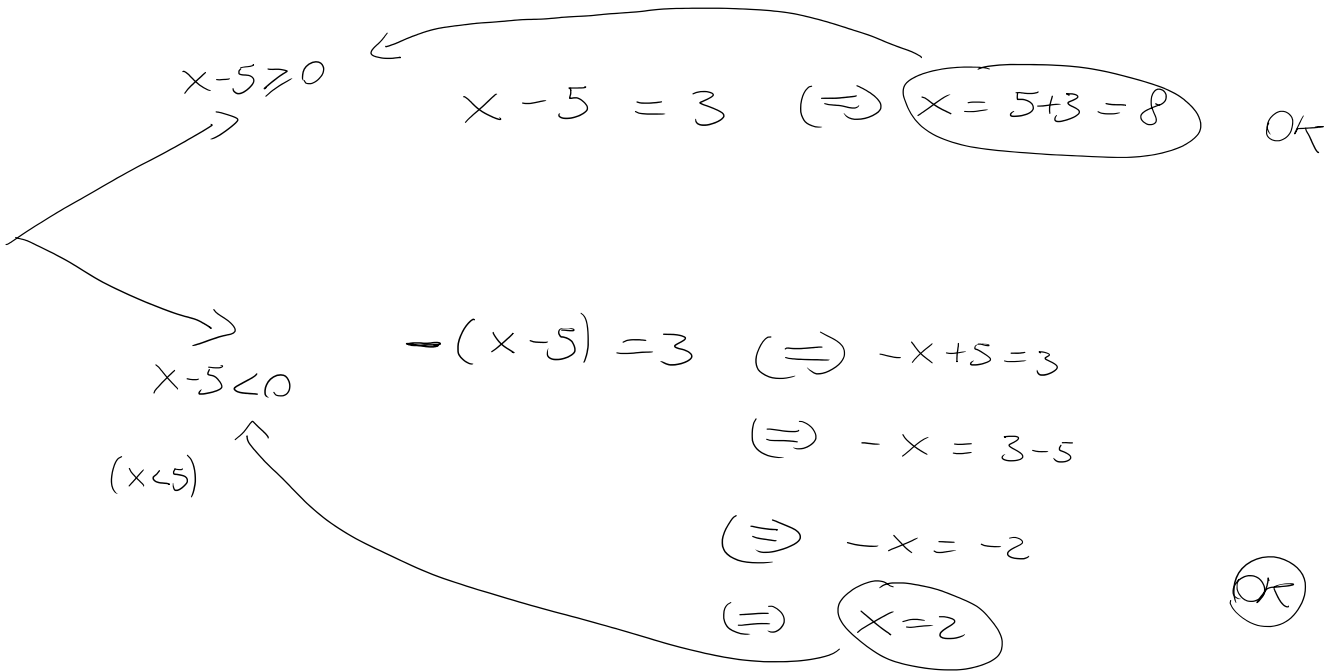
b) $|2-3| \neq |2| + |-3| = 5$

$$\uparrow$$

$$|-1| = 1$$

Esercizio

$$|x-5| = 3$$

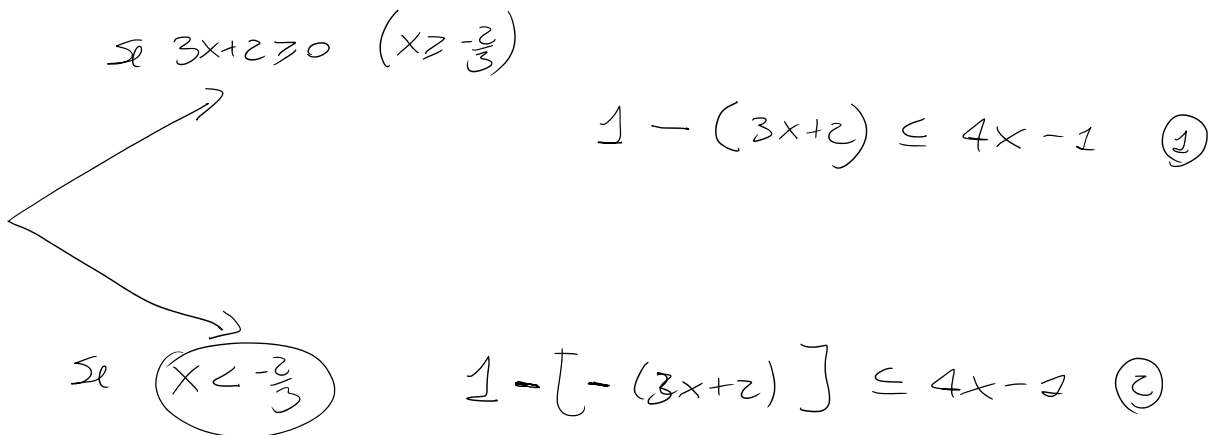


Sol

$$x = 2, 8$$

Esercizio

$$1 - |3x+2| \leq 4x-1$$



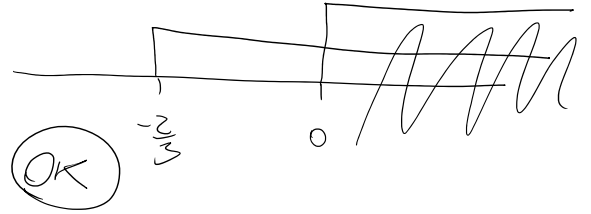
$$(1) \quad 1-3x-2 \leq 4x-1$$

$$-1 \leq 7x-1 \quad +1 \quad 0 \leq 7x$$

AAAAA

$$-3x - 4x \leq -1 - 1 + 2$$

$$-7x \leq 0 \quad (\Rightarrow) \quad x \geq 0$$

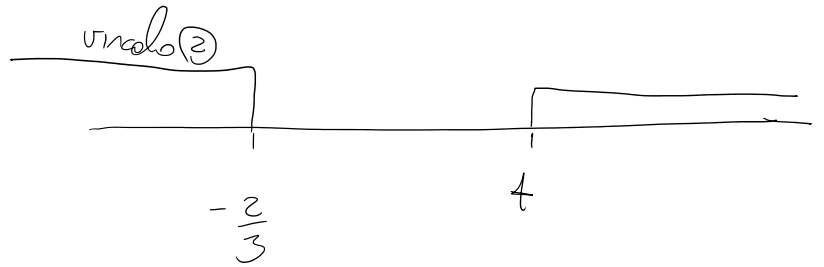


$$(2) \quad 1 + 3x + 2 \leq 4x - 1$$

$$3x - 4x \leq -1 - 2 - 1$$

$$-x \leq -4$$

$$x \geq 4$$

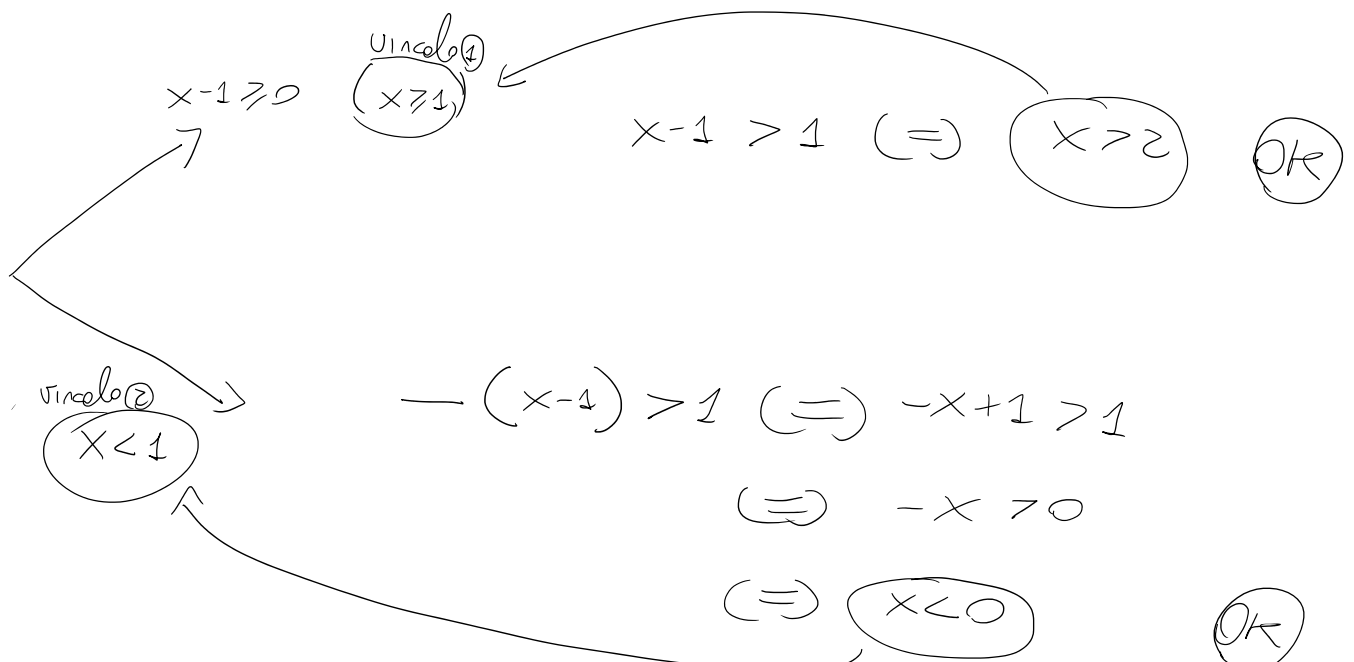


Sol (2) $\emptyset$

Conclusa Sol della diseg Sol (1) $\cup$ Sol (2) = $[0, +\infty[\cup \emptyset$
 $= [0, +\infty[$

Esercizio

$$|x - 1| > 1$$



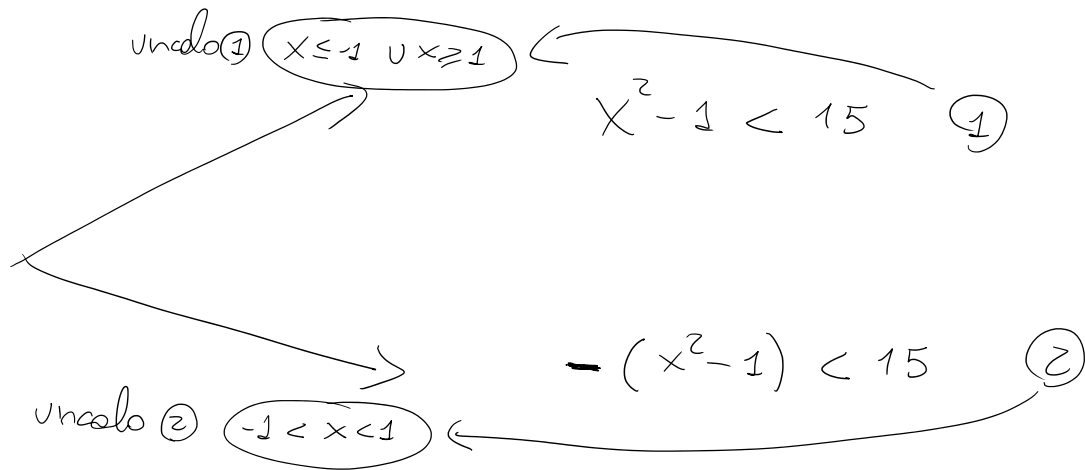
$$\Rightarrow x < 0$$

OK

Sol $] -\infty, 0[\cup] 2, +\infty[$

Esercizio $|x^2 - 1| < 15$

Un'idea da studiare $x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \vee x \geq 1$



(1) $x^2 - 1 < 15$
 $x^2 - 16 < 0$

$$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16) = +4 \cdot 4^2 = 2^2 \cdot 4^2$$

$$x_1 = \frac{-0 - 8}{2}$$

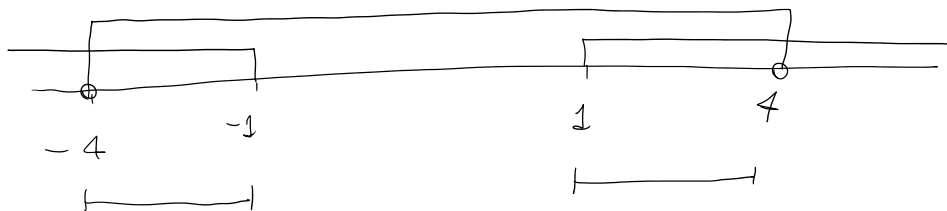
$$x_1 = -4$$

$$x_2 = \frac{-0 + 8}{2}$$

$$x_2 = 4$$

Sol $] -4, 4[$

Sol 12



sol²
vincolo ②

Sol ① $]-4, -1] \cup [1, 4[$

Risolvo ②

$$-(x^2 - 1) < 15$$

$$-x^2 + 1 - 15 < 0$$

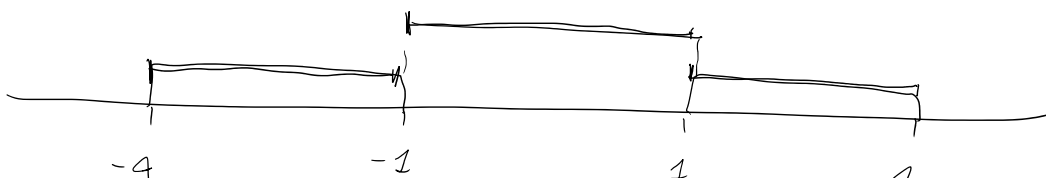
$$-x^2 - 14 < 0$$

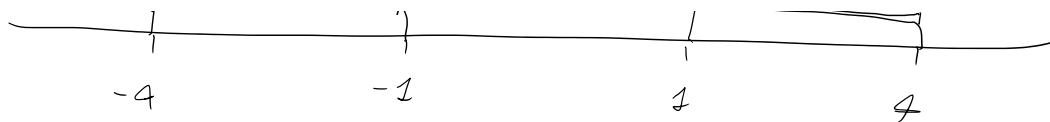
$$x^2 + 14 > 0$$

$\Delta < 0 \rightarrow$ Sol ② $\mathbb{R} \cap \text{vincolo ②} = \text{vincolo ②}$
 $=]-4, 1[$

concluso

$\text{Sol} = \text{Sol ①} \cup \text{Sol ②} = (]-4, -1] \cup [1, 4[) \cup]-4, 1[$
 $=]-4, 4[$





Eqⁿⁱ e Disuguaglianze Fratte (o razionali)

Chiameremo eq^{re} e/o diseq^{re} fratte ogni qual volta è presente il rapporto tra 2 polinomi.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi.

In tal caso abbiamo un campo di esistenza

$$CE = \{ x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0 \}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad P(x) = 0$$

Trovo le sol. di $P(x) = 0$ e le chiamo A

Infine sol di $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ sono $A \cap CE$

Caso disuguaglianza

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$$

Ho sempre $CE = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$

Ora utilizzo lo studio dei segni: ($P(x)$ e $Q(x)$ devono avere segno concorde)

Esercizio

$$\frac{3x^2 + 2x - 1}{x - 2} = 0$$

CE $x - 2 \neq 0 \quad (\Rightarrow) \quad x \neq 2 \quad (\mathbb{R} \setminus \{2\})$

Risolve

$$3x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 4 + 12 = 4^2$$

$$x_1 = \frac{-2 - 4}{6}, \quad x_2 = \frac{-2 + 4}{6}$$

$x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{1}{3} \quad \text{OK}$

Sol

$x = -1, \frac{1}{3}$

Esercizio

$$\frac{2x^2 + 3x + 1}{2x + 1} = 0$$

CE $2x + 1 \neq 0 \quad (\Rightarrow) \quad x \neq -\frac{1}{2}$

Studio $2x^2 + 3x + 1 = 0$

$\Delta = 9 - 4 = 1$

$x_1 = \frac{-3-1}{4}$

$x_2 = \frac{-3+1}{4}$

$x_1 = -1$

~~$x_2 = -\frac{1}{2}$~~

Conclusione : Sol $x = -1$

Esercizio

$\frac{x-1}{9-x^2} \leq 0$

Segni discordi

CE $9 - x^2 \neq 0$

$(9 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3)$

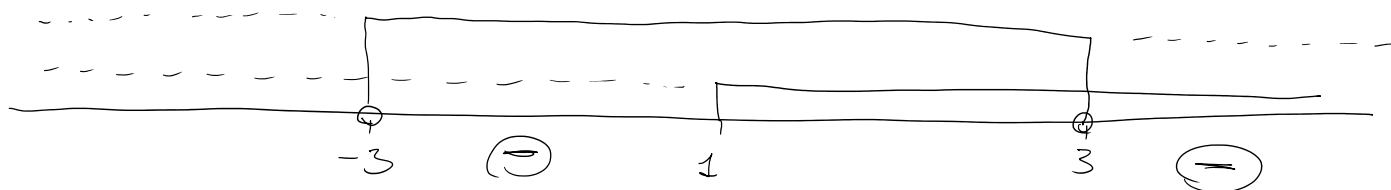
CE $x \neq \pm 3$

Studio dei segni

segno $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

segno $9 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 3$

Grafico



Sol $] -3, 1] \cup] 3, +\infty [$

Esercizio

$$\left| 1 + \frac{2-x}{x} \right| > 2$$

CE $(x \neq 0)$

Studio $1 + \frac{2-x}{x} \geq 0$

$$\frac{x + 2 - x}{x} \geq 0 \quad (\Rightarrow) \quad \frac{2}{x} \geq 0$$

$$(\Rightarrow) \quad (x > 0)$$

vincolo ① $(x > 0)$

$$1 + \frac{2-x}{x} > 2 \quad (1)$$

vincolo ② $(x < 0)$

$$-\left(1 + \frac{2-x}{x}\right) > 2 \quad (2)$$

Studio ① $1 + \frac{2-x}{x} > 2$

$$\frac{2}{x} > 1 \quad ; \quad \frac{1}{x} > \frac{1}{2}$$

vedi vincolo ① $x > 0$

$$1 > x$$

$$\text{Sol ① } 0 < x < 1$$

Studio ② (vincolo ② $x < 0$)

$$-1 - \frac{2-x}{x} > 2$$

$$\frac{-x-2+x}{x} > 2$$

$$\frac{-2}{x} > 2$$

$$-\frac{1}{x} > 1$$

$$\frac{1}{-x} > 1$$

moltiplico ambo i membri per $-x > 0$ (dal vincolo ②)

$$1 > -x$$

ossia

$$-x < 1 \quad (\Rightarrow) \quad x > -1$$

$$\text{ossia Sol ② } -1 < x < 0$$

Conclusion

$$\text{Sol} = \text{Sol ①} \cup \text{Sol ②} =$$

$$=]0, 1[\cup]-1, 0[$$

Ogni Irrazionale

Teorema (esistenza e unicità delle radici n-esime)

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ e sia $a \geq 0$ numero reale.
Allora esiste ed è unica soluzione all'equa

$$x^n = a$$

e chiameremo tale soluzione $x = \sqrt[n]{a}$

Oss Studiamo meglio l'equa $x^n = a$

Caso n pari osservo che $x^n \geq 0$ sempre

si ha che se $a \in \mathbb{R}^-$ (ossia $a < 0$)

$\Rightarrow x^n = a$ non ha soluz. (sol $\emptyset$)

Ossia $\sqrt[n]{a}$ ha senso solo se $a \geq 0$ (caso n pari)

Conclusione: se n è pari $\sqrt[n]{}$ ha un

campo di esistenza.

$$\sqrt[n]{Ax+1} = c$$

$$CE = \{x \in \mathbb{R} : Ax+1 \geq 0\}$$

$$\forall A(x) = c$$

$$CE = \{x \in \mathbb{R} : A(x) \geq 0\}$$

Caso n dispari invece posso considerare

$$\sqrt[n]{a} \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

non abbiamo alcun vincolo!

Dalla definizione segue che

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \quad \forall a \geq 0$$